Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele IX-XII
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda III

Problema 1.

Fie $x\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, determinați $\left\{x^n\right\}+\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$.

Soluție:

Observăm că $x+\frac{1}{x}=[x]+\left[\frac{1}{x}\right]+\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=[x]+\left[\frac{1}{x}\right]+1\in\mathbb{Z}$. Demonstrăm prin inducție că $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z},\ \forall n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$. Avem că $\left\{x^n\right\}+\left\{\frac{1}{x^n}\right\}=x^n-\left[x^n\right]+\frac{1}{x^n}-\left[\frac{1}{x^n}\right]\in\mathbb{Z}$. Cum $\left\{x^n\right\}+\left\{\frac{1}{x^n}\right\}\in[0,\ 2)\cap\mathbb{Z}$, analizăm cazurile:

i) $\left\{x^n\right\}+\left\{\frac{1}{x^n}\right\}=0\Rightarrow x^n\in\mathbb{Z},\ \frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1,\ 1\}\Rightarrow\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=0$, ceea ce este fals;

ii) $\left\{x^n\right\}+\left\{\frac{1}{x^n}\right\}=1$, soluția problemei.

Problema 2.

Fie ecuația $3x^2-2mx+m^2+m-2=0,\ m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația admite cel puțin o soluție întreagă.

Soluție:

Considerăm ecuația raportată la necunoscuta m: $m^2+(1-2x)m+3x^2-2=0$.

$\Delta=1-4x+4x^2-12x^2+8=-8x^2-4x+9$. Trebuie ca $\Delta\geq 0\Rightarrow x\in\left[\frac{-1-\sqrt{19}}{4},\ \frac{-1+\sqrt{19}}{4}\right]$.

Ecuația admite rădăcina $x_0\in\mathbb{Z}$, deci $x_0\in\left[\frac{-1-\sqrt{19}}{4},\ \frac{-1+\sqrt{19}}{4}\right]\cap\mathbb{Z}=\{-1,\ 0\}$. Pentru $x_0=-1$, obținem $m^2+3m+1=0\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Pentru $x_0=0$, obținem $m^2+m-2=0\Rightarrow m_1=-2,\ m_2=1$.

În concluzie, $m\in\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ -2,\ 1\right\}$.

Problema 3.

Să se determine limita șirului $(a_n)_{n\geq 2}$, $a_n=\sum_{k=2}^{n}\log_{k!}\frac{k+1}{2},\ n\geq 2$.

Soluție:

Evident, $\frac{k+1}{2}>\sqrt{k},\ \forall k\geq 2$ și atunci $a_n\geq\sum_{k=2}^{n}\log_{k!}\sqrt{k}$. Dar $\sum_{k=2}^{n}\log_{k!}\sqrt{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log_k k!}$ și, pentru $k\geq 2$, avem $k!<k^{k-1}\Rightarrow\log_k k!<k-1\Rightarrow\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log_k k!}>\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$.

Arătăm că $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\to+\infty$. Se știe că șirul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este strict crescător și are limita e. Atunci, conform teoremei lui Weierstrass, rezultă că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$. Prin logaritmare, $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$ și $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln(n+1)\to+\infty$.

În concluzie, $a_n>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}\right)\to\infty$, deci șirul $(a_n)_n$ este nemărginit superior. Șirul $(a_n)_n$ este strict crescător și $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$.